

連載 (講義)

電子光学入門

— 電子分光装置の理解のために —

(第5回)

嘉藤 誠

日本電子(株) 〒196-8558 東京都昭島市武蔵野 3-1-2

kato@jeol.co.jp

(2005年6月13日受理)

電子光学系の性能の優劣を決めるのは、線形の近軸特性からのずれの程度、すなわち収差です。そして、収差の定量的な評価を可能にするのが収差係数です。光学系を構成するレンズはそれぞれ非線形的作用をもち、その効果が光学系を伝わっていくことで最終的に像面での収差係数が決定します。今回は、収差係数が決定される過程、そしてその定性的な性質に関して述べます。

Introduction to Electron Optics for the Study of Energy Analyzing Systems (5)

M. Kato

JEOL Ltd., 3-1-2 Musashino, Akishima, Tokyo 196-8558.

kato@jeol.co.jp

(Received: June 13, 2005)

The first-order optical theory describes the behavior of electron beams in the vicinity of an optic axis. The deviation from the first-order properties is called aberration, which is represented numerically by a set of aberration coefficients. Each optical element generally has nonlinear lens action, and these effects are transferred to an image plane. This chapter describes this process and discusses the characteristics of aberration in an axially symmetric system.

5 光学系の収差と収差係数

5.1 はじめに

光学系の設計において、多くの場合に律速となるのは、与えられた制約のもとで収差をいかに減らすかという作業です。その過程において、収差の大小を評価するための量が収差係数です。光学レンズと電子レンズがもつ収差については、今までいくつか例を示してきました。本章では、収差係数の概念を導入したうえで、収差の種類と性質について詳しく議論します。

どんな光学系であっても、近軸理論の範囲内ではかならず理想的な結像が行われます。たとえば、光学顕微鏡や望遠鏡であれば、最終的な倍率さえ同じであればどんな光学系でも優劣がつかえません。しかし

現実には、非線形的作用、すなわち収差の程度によって、系の明るさや分解能が決まることとなります。収差係数をもちいれば、そのような近軸特性からの逸脱の度合いの程度と特徴を、数値によって示すことができます。

電子光学系の収差係数の導出過程は難解であり、たとえ軸対称系に限っても、計算をフォローするのは楽ではありません。途中の数式があまりにも複雑であるため、行き先を見失うことなく最後までたどり着くのは大変です。

収差係数を導出する過程は、数学的には、非線形の常微分方程式を摂動論によって解く作業として扱われます。出発点となるのは、ニュートンの運動方程式と等価な、近似のない軌道方程式です。1次軌道方

程式を導く際には、軌道方程式から1次よりも高次の項をすべて落とすことで線形の方程式を得ました。収差の導出は、そこで捨てられていた高次の非線形項の寄与を取り入れることで行われます。

しかし重要なのは、そのような計算や、結果としての収差係数の表式ではありません。われわれにまず要求されるのは、光学系の収差がどのような決まり方をして、何によって変わるのかということです。たとえば、レンズの倍率を2倍にしたら球面収差はどう変わるか？ コマ収差が絞りの位置によって変化するのはなぜか？ といった疑問にたいして、数式を通してではなく言葉で説明できなければなりません。

そのような理解のために、やはり収差係数の導出過程を追うことは必要です。しかし、単に微分方程式の解法としての理解では不十分であり、その過程において光学的な解釈が伴っていなければなりません。

今回の章は、定性的な議論によって可能な範囲で収差係数の導出過程を示し、その知識をもとに収差の種類と性質を議論します。そこで本章では、本質がよく見えるように、光学レンズ系、およびそれと対応する静電型レンズの話に限定します。磁界レンズは次章の内容となりますが、そこでは磁場による電子軌道のねじれによって収差係数が複素数になるなど、光の分野にはない効果が現れてきます。

なお今回に限ったことではありませんが、前回予告の内容と異なってしまったことをお詫び致します。

5.2 収差係数とその意味

5.2.1 軌道方程式の非線形項

前章において静電レンズの1次軌道方程式を導きましたが、その過程を思い出しておきましょう。出発点になったのは、ニュートンの運動方程式から時間を消去した軌道方程式、すなわち、

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2\Phi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - x' \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) (1 + x'^2 + y'^2) \\ y'' = \frac{1}{2\Phi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - y' \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) (1 + x'^2 + y'^2) \end{cases} \quad (1)$$

です。これによって、任意の静電場中の電子軌道 $x(z)$, $y(z)$ が決定されます。

上式において、 $\Phi(x, y, z)$ は加速ポテンシャルであり、電子が (x, y, z) という位置に到達したときの運動エネルギーが $e\Phi(x, y, z)$ となるように、 Φ の原点が定義されています。

系が z 軸まわりに軸対称であれば、加速ポテンシャルは円柱座標で $\Phi(r, z)$ というかたちで書け、これがラプラス方程式をみたすことから、つぎの展開式が導かれます。

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} r^{2n} \phi^{(2n)}(z) \\ &= \phi(z) - \frac{1}{4} r^2 \phi''(z) + \frac{1}{64} r^4 \phi^{(4)}(z) \\ &\quad - \frac{1}{2304} r^6 \phi^{(6)}(z) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $\phi(z)$ は軸上ポテンシャル、すなわち z 軸上の加速ポテンシャルの値 $\Phi(0, z)$ です。

上式は、軸上での Φ の値が知れているとき、光軸から離れて行くときの Φ の変化を r のべき展開として与えています。すなわち、軸上から軸外へ向かっての展開です。高次の項を多く含めるほど、光軸から遠く離れた場所の Φ がより正確に与えられます。

この展開式を(1)に代入して、 x, y, x', y' について1次の項だけを残せば、次の1次軌道方程式が得られます。

$$\begin{cases} x'' + \frac{\phi'(z)}{2\phi(z)} x' + \frac{\phi''(z)}{4\phi(z)} x = 0 \\ y'' + \frac{\phi'(z)}{2\phi(z)} y' + \frac{\phi''(z)}{4\phi(z)} y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

この線形の微分方程式に従う軌道は収差をふくまず、理想的なレンズ作用を示すのでした。この方程式をもとにして、光学系の近軸特性が議論されます。

さて、レンズの収差を考慮するためには、1次軌道方程式を導く際に無視していた高次の項を取り入れなければなりません。計算してみるとわかりますが、 x, y, x', y' に関して偶数次の項は現れず、高次項は3次、5次、9次のように続きます。

奇数次の項しか現れないのは軸対称性からくるものですが、これに関しては後に述べることにして、ここでは結果だけ記しておきます。(1)の第1式について、3次まで残した結果は次のようになります。

$$\begin{aligned} x'' + \frac{\phi'}{2\phi} x' + \frac{\phi''}{4\phi} x &= -\frac{\phi'}{2\phi} x' (x'^2 + y'^2) \\ &\quad - \frac{\phi''}{4\phi} x (x'^2 + y'^2) \\ &\quad + \frac{1}{8\phi} \left(\phi''' - \frac{\phi' \phi''}{\phi} \right) x' (x^2 + y^2) \\ &\quad + \frac{1}{32\phi} \left(\phi^{(4)} - \frac{2\phi''^2}{\phi} \right) x (x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (4)$$

この右辺には未知関数としての $x(z)$ と $y(z)$ が両方含まれるので、(1)の第2式から導かれるもう一つの方

程式と連立して考えなければなりません。そのような一組の方程式が、3次収差を決定するための軌道方程式となります。

1次軌道方程式(3)においては、 ϕ に関する微分は2階微分までしか含まれていません。一方、3次項まで考慮した方程式(4)では、 ϕ の4階微分まで現れています。これは(2)の展開式において、1次軌道に寄与するのは第2項まで、3次収差に寄与するのは第3項までであるということです。すなわち高次の近似ほど、光軸から離れた場所でのポテンシャル分布が反映されるわけです。

なお、(4)の右辺は、 x, y, x', y' に関する多項式として特徴的なかたちをしています。これも系が軸対称であることの反映です。軸対称な系がどのような収差をもちうるかという議論の際に、このような対称性の考察が必要になってきます。(§5.3.2で詳しく述べます。)

さて、電子レンズの収差を研究するためには、(4)のような微分方程式を相手にする必要があるわけです。(4)には相対論補正が施されておらず、また磁場は考慮されていません。しかし、収差係数の説明のためにはこの形を示すだけで十分です。

(4)は右辺に未知関数の高次項を含んでいるので、非線形方程式となり、そのままでは解析的な扱いはできません。微分方程式論における一般常識として、「非線形の微分方程式は解けない」のです。もちろん、数値的に解くことは何の問題もなく可能です。しかし、それを行うのであれば、近似のない軌道方程式(1)を解けばよいわけです。つまりレイトレースです。わざわざ高次の項をおとす理由がありません。

上のような方程式を導く理由は、それから収差係数(aberration coefficient)というものが導入でき、その数値によって光学系の性能が評価できるということです。収差係数の導出過程においては、(4)のような非線形方程式にたいする数学的な処方が大部分を占めることになります。

重要なことは、このような方程式の解を導く途中で、収差係数という概念が自然に現れるのではないということです。収差係数というものがどのようなアイデアから導入され、どのような性質をもつかということを知る必要があります。

5.2.2 収差係数の導入

前節で導いた非線形方程式に最初から取り組むのは大変なので、ここでは光学レンズの収差を考えま

す。前節の結果を踏まえれば、光学レンズの収差のとりうる形についての推測が可能になります。

第4章の最初の節で、理想的なレンズ作用とはなにかを議論しました。Fig.1のような薄肉凸レンズを考えると、レンズは、入射した光線の入射高 x_1 と傾き x'_1 に応じて、適当な屈折作用を与えるものとして扱えます。

屈折後の光線の傾きを x'_2 とすると、レンズによる屈折作用がつぎの形で与えられるとき、理想的な結像作用が行われるのでした。

$$x'_2 - x'_1 = -\frac{1}{f} x_1 \quad (5)$$

ここで f はレンズの焦点距離です。上式は1次理論を与えるもので、いわゆるレンズ公式、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (6)$$

と等価です。もしレンズ作用がこのような理想的なものでなくなれば、それが収差として現れることになります。

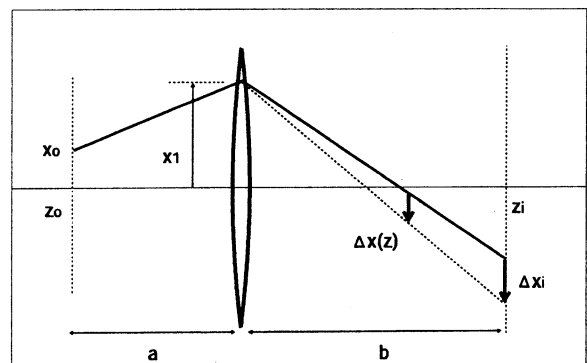


Fig. 1: Ideal lens action is realized when the change of inclination $x'_2 - x'_1$ is proportional to the height x_1 of the ray in the entrance plane of the lens. When the lens action has nonlinear effects, aberration $\Delta x(z)$ appears.

(5)が意味するところは、入射前後の光線の傾きの変化量が入射高 x_1 に比例するということです。もしこの比例関係が厳密に成り立たなくなると、(5)の右辺には x_1 の高次の項が続くことになるでしょう。また(5)の右辺には入射光線の傾き x'_1 が含まれていませんが、もし右辺が x'_1 にも依存性するようになると、やはり収差の原因になるはずで

ここで前節の(4)を思い出せば、3次までの議論と

して次のような関数形を想定できるでしょう。

$$x_2' - x_1' = -\frac{1}{f} x_1 + Ax_1'^3 + Bx_1'^2 x_1 + Cx_1' x_1^2 + Dx_1^3 \quad (7)$$

ここで A, B などはレンズによって決まる定数です。(4)の右辺は $y(z)$ を含んでいましたが, zx 平面上の軌道だけを考えることにすれば, $y = y' = 0$ と置くことができるので, 上のかたちになります。

上式の右辺に付け加わった非線形項は, 電子にたいしての言葉で言えば, レンズの出射面における電子軌道の傾きが, 1次軌道からどれだけずれるかを与えます。(本章では「光線」と言ったり「軌道」と言ったりしますが, 頭の中ではいつも電子軌道を考えています。) 以下において, (7)の非線形項がどのような収差をつくるのかを調べてみましょう。

まず, 物面 $z = z_0$ における初期条件は, 位置と傾きのセット (x_0, x_0') で指定されます。われわれが問題にするのは像面 $z = z_i$ における座標 x_i ですが, これも位置と傾きをまとめて (x_i, x_i') を考えます。

復習になりますが, 初期条件は x_0 と x_0' だけ与えればよく, x_0'' のような高階微分が含まれない理由を確認しておきましょう。光の場合は, 光線の屈折の法則, すなわちスネルの法則がそれを必要としないからです。ある屈折面にたいしての光線の入射角に応じて出射角が決まる, というのが法則の内容でした。(5)や(7)の関係も, この事情を反映しているわけです。

一方, 電子軌道の場合は, 軌道方程式が2階の微分方程式に従うということの帰結です。さらにもとをたどれば, ニュートンの運動方程式が時間に関して2階の微分方程式であるということです。微分方程式論から, 初期条件として (x_0, x_0') を指定すれば解は一意に決定されます。(第3章で示しましたが, 光学の場合でも連続的な屈折率分布を想定すれば, 光線の方程式はやはり2階の方程式になります。スネルの法則は, この光線方程式において屈折率の変化を不連続にした極限として得られます。)

このような事情から, 光線や電子軌道の変化を追うために状態平面 xx' というものを考えたわけです。この平面上において光学系のはたらきを把握することで, 第4章で述べたエミッタンスのような重要な概念が生まれてきます。状態平面で見た1次軌道の軌跡は, 転送行列(トランスフォーマトリックス)による1次変換として与えられるのでした。

そこで, Fig.1の状況にもどり, 光線の状態 (x, x') の変化を追ってみましょう。まず物面からレンズ入射

面までの, 長さ a のドリフト空間における変換は,

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + ax_0' \\ x_1' = x_0' \end{cases} \quad (8)$$

となります。レンズ作用は, 入射面から出射面への, 同一の z 座標における変換として,

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_2' = x_1' - \frac{1}{f} x_1 + R(x_1, x_1') \end{cases} \quad (9)$$

と書けます。ここでは簡単のために, (7)の右辺の非線形項を $R(x_1, x_1')$ と書いています。最後に, 長さ b のドリフト空間では,

$$\begin{cases} x_i = x_2 + bx_2' \\ x_i' = x_2' \end{cases} \quad (10)$$

となります。以上を行列形式で書くなら次のようになります。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \quad (13)$$

さらに上式において, 二つのドリフト空間の転送行列を T_a, T_b , 収差のないときのレンズ作用を与える転送行列を T_L とおけば, 次のように書かれます。

$$\begin{cases} x_1 = T_a x_0 \\ x_2 = T_L x_1 + p \\ x_i = T_b x_2 \end{cases} \quad (14)$$

上式において, 第2式の $p = (0, R)$ がレンズの非線形的作用を示します。

一般に, 転送行列は1次の光学性質を与えるものであり, その中に非線形的作用が含まれることはありません。上の第2式では非線形の効果は p として付加されていて, x_1 と x_2 の関係は1次変換ではなくなることに注意しましょう。

さて(14)は, 初期状態 x_0 から出発して, 中間の状態 x_1, x_2 を経て最終的に x_i にいたるまでの状態の変化を示しています。これら三式から中間の状態を消

去すれば、直接 x_o と x_i の関係を与えることができます。結果は次のようになります。

$$x_i = T_b T_L T_a x_o + T_b p \quad (15)$$

上式で $p = 0$ とすれば右辺の第1項だけ残るので、この項は1次軌道としての伝達を与えています。すなわち、 $T = T_b T_L T_a$ は物面から像面までの転送行列であり、これが系全体としての近軸特性を与えます。

右辺の第2項は、レンズのもつ非線形項の寄与が像面に伝わる様子を与えます。つまり、レンズによって余分に発生した p という状態の変化分が、レンズ出射面から像面までの転送行列 T_b で運ばれることを言っています。この項は1次軌道からのずれを与えるので、 $\Delta x_i = (\Delta x_i, \Delta x'_i)$ と書きましょう。

Δx_i の第1成分 Δx_i が、像面における座標 x_i の1次軌道からのずれ、すなわち収差 Δx_i を与えます。第2成分は軌道の傾きについての収差となりますが、当面は位置の収差だけを問題にします。

収差 Δx_i を具体的に書き下してみましよう。まず(15)から、

$$\Delta x_i = T_b p = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ R(x_1, x'_1) \end{pmatrix} \quad (16)$$

となり、この第1成分として次式が得られます。

$$\Delta x_i = b R(x_1, x'_1) \quad (17)$$

これは、レンズ出射面での傾きのずれ $R(x_1, x'_1)$ にドリフト長 b をかけたものが像面での位置のずれになることを言っていて、これは Fig.1 からすぐわかることです。

ただし、中間変数は消去するのでしたから、 R の中の x_1, x'_1 は、(8) をもちいて x_o と x'_o で置き換えなければなりません。この操作によって、結局次の表式が得られます。

$$\begin{aligned} \Delta x_i = & b (A + aB + a^2C + a^3D)x'_o{}^3 \\ & + b (B + 2aC + 3a^2D)x'_o{}^2 x_o \\ & + b (C + 3aD)x'_o x_o^2 \\ & + b D x_o^3 \end{aligned} \quad (18)$$

これを次のようにおくことにします。

$$\Delta x_i = C_S x'_o{}^3 + 3C_K x'_o{}^2 x_o + C_A x'_o x_o^2 + C_D x_o^3 \quad (19)$$

ここでやっと、収差係数とよぶべき量が現れます。上式の C_S, C_K, C_A, C_D はそれぞれ、球面収差 (spherical aberration)、コマ収差 (coma)、像面湾曲 (field

curvature)、歪曲 (distortion) にたいする収差係数です。これらは、最低次の3次の非線形項から生じるものなので、3次の収差係数です。

ただし、ここでは zx 平面上の光線しか考えていないので、収差の正式な分類はまだできません。ここの命名は暫定的なものです。(上式で C_K のまえに3をつけているのも、最終的な定義を見越しています。)

以上においては、像面における座標のずれとしての収差の表式を導きました。もし $z = z_i$ が観察面 (フィルムなど) であればそれで十分です。しかし、たとえば電子顕微鏡においては、回折面における収差が必要になることもあります。

あるいは、電子ビームの輸送系を考えると、決まった面での結像ではなく途中の状態が重要なので、一般の z の関数としての収差 $\Delta x(z)$ が要求されることがあります。また、そのような系から別の光学系にビームを受け渡す場合には、傾きについての収差も重要です。そのような場合は、収差まで考慮したエミッタンス図の変化の様子が描ければ、一番わかりやすくなります。

とは言え、基本はあくまで「像面における、位置についての収差」です。ふつうに収差とか収差係数と言えば、その意味です。

5.2.3 収差係数の意味とはたらき

収差係数は、光学系をブラックボックスとして捉えるための概念です。すなわち、光線の初期条件 (x_o, x'_o) が与えられたとき、途中の状態は気にせずに最終像面での収差量を与えるための量としてはたります。

重要なことは、収差係数は初期条件とは無関係に決まるということです。あらかじめすべての収差係数を求めておけば、任意の初期条件にたいしての収差量が代数的な計算だけで得られます。あるいは、収差係数のひとつひとつが像面において決まった収差パターンに対応するので、収差係数の数値を知ればそれで十分ということも少なくありません。これが収差係数というものの威力です。

もちろん、このような便利さの代償として、精度は有限の次数に限定されてしまいます。しかし、いくつかの収差係数の組によって系の特性を評価できるというメリットは絶大です。レイトレースという手段しかもたない場合、軌道一本の計算に時間がかかるだけでなく、かなりの数の軌道を計算してみないと傾向が見えてきません。

さて、前節において収差係数が決定された過程を

振り返ってみましょう。レンズそのものとしてののはたらしきは(7)で尽きています。この式非線形項のそれぞれが収差係数に一つ一つに対応するように考えがちですが、そうはなっていないことが(18)からわかります。

たとえば、 C_S を決めるのはAだけではなく、他のすべての項が寄与します。また、 C_D はDだけで決まりますが、Dはすべての収差係数を発生させます。このように、収差係数は互いに独立なのではなく、複雑に関連し合っています。

このことから、(7)の非線形項をうまく選ぶことで特定の収差だけをもつレンズをつくらうとしても、うまく行きません。球面収差に関しては例外で、Aの項だけ0でないようなレンズを考えれば、それは球面収差だけをもつレンズです。しかし、コマ収差だけをもち他の収差は0であるようなレンズは、どうがんばってもつくれません。(これは薄肉近似におけるレンズのはなしであり、一般的にそう言えるわけではありません。)

このように収差係数が互いにからみ合った関係になるのは、レンズ前後のドリフト空間によって、光線の状態 (x, x') が混ぜ合わされるからです。初期条件 (x_0, x'_0) がそのままレンズへの入射条件になるのではなく、最初の長さ a のドリフトによって(8)の変換を受けて、 (x_1, x'_1) となった後にレンズ作用を受けます。また、レンズをぬけた後の光線の状態 (x_2, x'_2) は、長さ b のドリフトによって(10)の変換を受けて、はじめて像面での光線の状態となります。

そこで、レンズ前後のドリフト空間も、収差係数の大きさを左右する一員としてはたらいっていることとなります。Fig.1をもう一度見てみましょう。レンズを出射してから像面までの光線を考えると、 z の関数として見たときの収差 $\Delta x(z)$ は単調に増加しています。しかし、そのドリフト空間において非線形的作用が存在しているわけではありません。すなわち、ドリフト空間においては収差の原因が存在しないにもかかわらず、収差はドリフトで増加し続けるということです。

これに関連して、レンズの倍率と収差の関係を考えおきましょう。Fig.1において、レンズを若干弱くして倍率を大きく(つまり b を大きく)してみます。光学レンズではレンズ強度は可変にはなりません。電子レンズでは簡単です。この際、非線形項の大きさも少し変わるはずですが、 b の変化が小さければ一定と考えてよいでしょう。

このとき、レンズの非線形項による傾きの変化量

は同じですが、(17)によって、ドリフト長の増加に比例して像面の収差 Δx_i が増えます。つまり、像を拡大した分だけ収差も拡大されます。倍率を2倍にすれば、ボケも2倍になるわけです。

さて、レンズ前後のドリフト空間によって「光線の状態 (x, x') が混ぜ合わされる」と言いましたが、ドリフト空間における状態の変化は単純なので、あまり実感がわかないかも知れません。しかし、レンズの前後に他のレンズが置かれれば、そのような単純な関係ではなくなります。あるいは屈折率が連続的に変化する系では、さらに複雑な混ぜ合わせが起きるでしょう。

前節 §5.2.2 で示した定式化は、一般の光学系や電子レンズ系において、収差を計算するための方法を示唆しています。ポイントとなるのは、非線形の効果によって発生した (x, x') の変化が光学系をどのように伝播していくか、ということです。これをうまく定式化できれば、光学的な意味を見失うことなく、収差係数の表式を導くことができるでしょう。そしてこの手法は、一般に非線形の微分方程式を扱うための数学的手段となりうるはずで、これは次回のテーマです。

5.3 収差の種類と性質

5.3.1 収差の表わし方

像面における収差 Δx_i は、初期条件 x_0, x'_0 のべき展開の形で次のように与えられました。

$$\Delta x_i = C_S x_0'^3 + 3C_K x_0'^2 x_0 + C_A x_0' x_0^2 + C_D x_0^3 \quad (20)$$

上式において、 x_0' は物面における軌道の傾きですが、軌道が光軸となす角をラジアンで測って α_0 とすれば、 $x_0' = \tan \alpha_0$ です。1次理論が成り立つような条件では $\tan \alpha_0 \approx \alpha_0$ であり、 x_0' と α_0 をイコールに置いてかまいません。

3次収差まで含めると、対象となる角度は広がりますが、レイトレースが必要となるような数十度の角度まで考えない限り、両者の違いはわずかです。そこで若干の誤差を承知の上で、 x_0' を α_0 で置き換えて、次のように書くのが普通です。

$$\Delta x_i = C_S \alpha_0^3 + 3C_K \alpha_0^2 x_0 + C_A \alpha_0 x_0^2 + C_D x_0^3 \quad (21)$$

さて、実際に収差による影響を評価する際には、(20)や(21)のような表式では不便になることがあります。この事情を次に述べます。

光学系においては一般に、軌道を適当に制限するために、どこかに絞りが置かれます。物面の x_o に置いた点光源の像がどのようにボケるかを調べるためには、この物点から出て絞りを通過するすべての軌道を考え、これらが被る収差を計算することになります。

まず焦点面に絞りを置く場合を考えると、Fig.2(a) のようになります。このときは、物面での角度 α_o (あるいは傾き x'_o) と、絞り面での軌道の高さ x_a が比例します。そこで α_o を、0 を中心にしてある範囲で動かせば、それが絞りを通過する軌道の条件に対応します。

なお第2章でも述べましたが、物面の軸外に置いた光源から出た軌道のうち、絞りの中心を通るものが主光線 (principal ray) とよばれます。絞りが焦点面である場合には、物面から傾き 0 で出た軌道が主光線です。

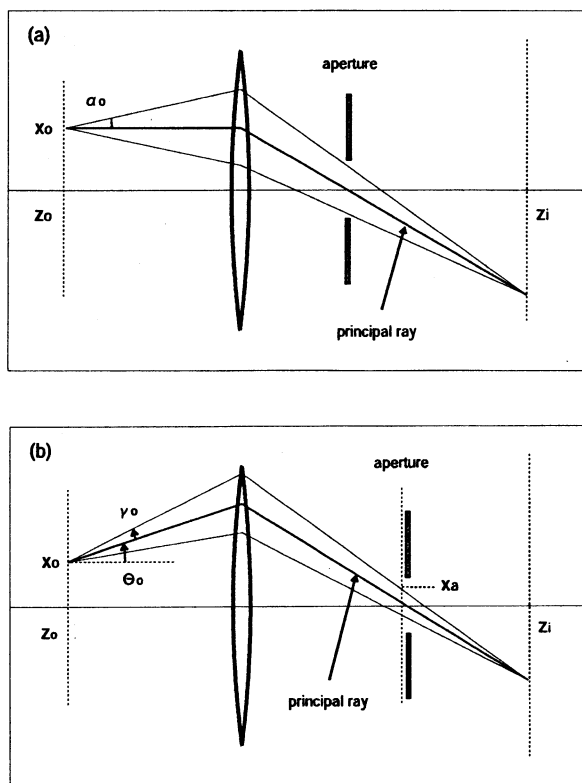


Fig. 2: Action of an aperture changes according to the place of the aperture: (a) focal plane of a lens; (b) general position.

さて、絞りが焦点面以外に置かれると Fig.2(b) のようになります。このときは α_o と x_a は比例しなくなります。物面における主光線の角度を θ_o 、そこから測った光線の角度を γ_o とすれば、 γ_o が x_a に比例し

ます。そこで、Fig.2(a) の α_o の役割をはたすのが γ_o ということになります。しかし、このような角度をもちいるよりも、 x_a を変数にとる方が直接的でしょう。

こういった事情から、軌道を指定するための変数の組として、 (x_o, x'_o) ではなく (x_o, x_a) をもちいるのが便利です。この方式では、収差係数は x_o と x_a に関する展開係数として定義し直す必要があります。この作業は §5.4.1 で説明しますが、結果は次のように、 (x_o, x'_o) で展開するのと同じ形になります。

$$\Delta x_i = C_S^{(A)} x_a^3 + 3C_K^{(A)} x_a^2 x_o + C_A^{(A)} x_a x_o^2 + C_D^{(A)} x_o^3 \quad (22)$$

上式の係数をアパーチャ形式における収差係数とよび、上式では右肩に (A) をつけて区別しています。これらの係数はすべて、絞り位置の関数となります。ただし、(20) や (21) の形式とアパーチャ形式を同時にもちいることはあまりないので、上式の収差係数を単に C_S などと書くこともあります。

さて、少し細かい問題に触れておきます。軌道を (x_o, x'_o) で指定する場合は、この初期条件のもとでの1次軌道と、同じ初期条件のもとでの収差を含んだ軌道との差が Δx_i です。ところが、軌道を指定するために (x_o, x_a) をもちいる場合は、少しややこしくなります。

すなわち、1次軌道と収差を含んだ軌道では、 x_o と x_a を通るために要求される x'_o が異なってしまいます。つまり両者は、異なる初期条件をもつことになってしまいます。

この問題は収差係数を導出する過程で議論すべきなのですが、本章では簡単に、次のように約束します。まず、 (x_o, x_a) という組は、1次軌道を指定するための変数としてもちいます。そして、この条件をみたす1次軌道の初期条件と同一の初期条件のもとで、収差を含んだ軌道を考えます。

この約束なら、1次軌道と収差を含んだ軌道は同じ初期条件をもつことになるので、考えやすいでしょう。ただし、 (x_o, x_a) で指定された収差を含んだ軌道は、厳密には x_a を通らないことになってしまいます。とは言え、収差は非常に小さい量なので、実際にこの約束で不都合が起きることはありません。

5.3.2 軸対称レンズの収差の一般形

いままでは xz 平面上の軌道だけを考えていましたが、ここで y 方向まで含めて3次元的に考えてみましょう。この場合は、前節のアパーチャ形式での変数

を拡張して、軌道を指定するために (x_o, y_o, x_a, y_a) という変数の組をもちいることとなります。

そこで、 $u_o = (x_o, y_o)$, $u_a = (x_a, y_a)$ と書くことにすれば、この二つのベクトルの組 (u_o, u_a) に一つの軌道が対応することになります。(前節では状態平面上の点を $x = (x, x')$ のようなベクトルで表したので、これと混乱ないようにしましょう。) 絞りによってビームが制限される様子を、Fig.3 に示します。この図は、物点が y 軸上にある場合を描いています。

zx 平面上での収差の表式は (22) ですが、 y 方向まで含めたときにどのような展開式になるのかはすぐにはわかりません。そこで取りあえず、もっとも一般の形として次のようにおきます。

$$\begin{cases} \Delta x_i = \sum_{p+q+r+s=3} C_x(pqrs) x_o^p y_o^q x_a^r y_a^s \\ \Delta y_i = \sum_{p+q+r+s=3} C_y(pqrs) x_o^p y_o^q x_a^r y_a^s \end{cases} \quad (23)$$

上式における展開係数が、収差係数ということになります。問題は、系が軸対称であるということをご考慮したときに、これらの収差係数間に何か制約が生じてくるかということなのです。

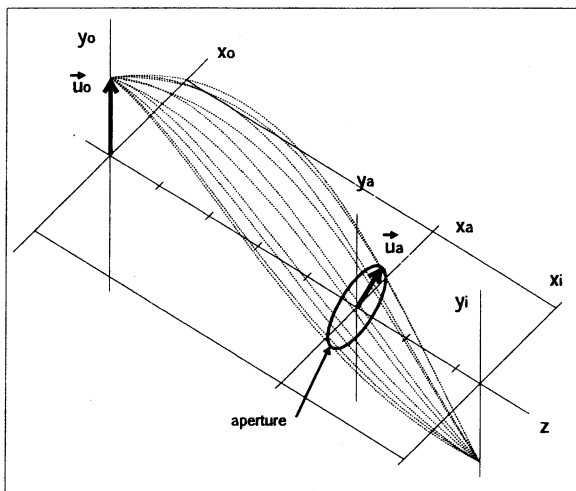


Fig. 3: Illustrating the action of an aperture. A first-order trajectory is specified by two vectors : $u_o = (x_o, y_o)$ at an object plane and $u_a = (x_a, y_a)$ at an aperture plane.

たとえば、 $\Delta x_i = C x_o^3$, $\Delta y_i = C y_o^3$ という収差をもつ系、すなわち $C_x(3000) = C_y(0300) = C$ で、

他の収差係数はすべて 0 という系はありうるでしょうか？これは x と y で対称なかたちをしているので許される収差のように思えます。しかし実は、このような収差をもつ系は軸対称系ではありえないのです。

系が軸対称であるという事実から要求されることは、 u_o と u_a を z 軸まわりに同じ角度だけ回したときに、 $\Delta u_i = (\Delta x_i, \Delta y_i)$ もそれと同じ角度だけ回転しなければならないということです。二つのベクトル u_o, u_a にたいして (23) で与えられる Δu_i が、ベクトルとして変換されなければなりません。

先に示した $\Delta x_i = C x_o^3$, $\Delta y_i = C y_o^3$ という例は、この条件をみたくしません。 (x_o, y_o) をある角度で回転させる変換を施したとき、 (x_o^3, y_o^3) はそのような回転を受けません。つまり、 (x_o^3, y_o^3) はベクトルを定義していないということです。

行すべきことは、「 x_o, y_o, x_a, y_a を組み合わせてつくられる 2 成分量で、各成分が 3 次多項式であり、かつベクトルとして振舞うようなもの」の一般形を決定することです。

まずベクトルとして変換する 2 成分量としては、 u_o の定数倍、あるいは u_a の定数倍があります。これらにかかる「定数」は、回転によって不変にたもたれる量、すなわちスカラーでなければなりません。二つのベクトル u_o, u_a からつくられるスカラー量としては、

$$\begin{cases} u_o \cdot u_o = x_o^2 + y_o^2 \\ u_a \cdot u_a = x_a^2 + y_a^2 \\ u_o \cdot u_a = x_o x_a + y_o y_a \end{cases} \quad (24)$$

があります。これらは 2 次の量なので、 u_o と u_a にかかる係数としてもちいれば、ベクトルとしての 3 次の量がつくれます。

これから、軸対称系の収差として許されるかたちがわかります。すなわち、 u_o か u_a の定数倍、あるいはそれらの線形結合でもよく、係数のなかに (24) のどれかが組み込まれることで 3 次の量になっているようなものです。(この考察においては変換性だけが問題なので、 u_o と u_a をあたかも同一平面上のベクトルと考えてかまいません。)

光学系の収差として、軸対称性の要求をみたくするのはすべて現実に起こりうるかということ、そうではありません。これは光学系というものの本質に関わることであり、一番肝心なところですが、詳細は後の章に回します。(変分原理が必要です。)

軸対称の光学系がもちうる収差の一般形は、結果

だけ書いてしまうと次のようになります。

$$\begin{aligned} \Delta u_i = & C_S(\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a)\mathbf{u}_a \\ & + C_K(\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a)\mathbf{u}_o + 2C_K(\mathbf{u}_o \cdot \mathbf{u}_a)\mathbf{u}_a \\ & + 2C_{A1}(\mathbf{u}_o \cdot \mathbf{u}_a)\mathbf{u}_o + C_{A2}(\mathbf{u}_o \cdot \mathbf{u}_o)\mathbf{u}_a \\ & + C_D(\mathbf{u}_o \cdot \mathbf{u}_o)\mathbf{u}_o \end{aligned} \quad (25)$$

上式は、一見すると軸対称性の要請による一般形になっているようです。しかし、それ以外の条件も含まれています。すなわち、上式では右辺第2項の係数 C_K と第3項の係数 $2C_K$ が関連していますが、これが光学系として本来的に課される条件となります。軸対称性だけを考えれば、これらは独立でよいはずですが。

(25)における係数の名称は、光学ではなく電子光学における慣例に合わせています。 C_S は球面収差係数、 C_K はコマ収差係数、 C_{A1} と C_{A2} は組になって像面湾曲と非点収差を表わす係数、 C_D は歪曲収差係数です。

第1章ですでに紹介しましたが、これらの収差はまとめて**ザイデルの五収差**とよばれるものです。これらを回折収差や色収差と区別して、**幾何収差**(geometrical aberration)とよぶことがあります。また幾何収差のうち、球面収差以外は光源が光軸を離れてはじめて現れるので、それらをまとめて**軸外収差**(off-axis aberration)といいます。

(25)において、もし zx 平面上の軌道だけを考えれば、

$$\begin{aligned} \Delta x_i = & C_S x_a^3 + 3C_K x_a^2 x_o \\ & + (2C_{A1} + C_{A2}) x_a x_o^2 + C_D x_o^3 \end{aligned} \quad (26)$$

となり、 $C_A = 2C_{A1} + C_{A2}$ とおけば(22)となります。zx平面上の軌道に限定したとき、収差係数が一個少なく済むことの光学的な理由は、§5.3.5で明らかにあります。

さて、(25)の収差は実は軸対称性以外の別の対称性もみたくしています。具体的には次節以降で見えますが、たとえば物点が y 軸上にあるときに(Fig.3の状況です)、収差パターンは yz 平面にたいして対称になります。

この面対称性は、軸対称性の要求とは別のものです。もともと軸対称性しか考えていなかったはずなのに、これと別の対称性もみたくされていることとなります。

なぜこうなったかと言えば、上で行った軸対称性の議論において、面対称性も暗に含めていたのです。た

とえば(25)の右辺第1項 $C_S(\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a)\mathbf{u}_a$ を考えると、 C_S は必ずしも定数である必要はなく、ベクトル \mathbf{u}_a に作用してそれをある角度だけ回す量、つまり回転行列であってもよいのです。 C_S がこのような量であっても、 \mathbf{u}_o と \mathbf{u}_a を z 軸まわりに回したときに $\Delta \mathbf{u}_i$ も同じ角度だけ回転すべき、という条件はみたくされています。すなわち、回転対称性はみたくされますが、面対称性は失われています。

このような、 z 軸まわりにねじれたような収差パターンは不自然であり、生じえないように思えます。実際、光学レンズ系、あるいは静電レンズ系ではそのような収差はありえず、(25)において係数をすべて定数としたものが、許される収差の一般形となります。

ところが、磁界レンズを含む系においては、ねじれ成分が生じてしまうのです。第2章で見たように、磁場中の電子はらせん運動を行い、回転するラーモア座標系で見ればその回転成分は打ち消されるのでした。しかし、実はその打ち消しが完全に行えるのは1次近似までであり、収差に関してはねじれ成分が残ってしまいます。

そこで、磁場が存在する場合は、収差係数は行列である(?)ということになってしまいます。しかし、(25)の係数をすべて行列に読み替えるだけでは、まどうまく行かないのです。

この困難は、ベクトルのかわりに複素数をもちいることで回避されるのですが、これに関しては次回述べることにします。本章ではすべて光学レンズ系、あるいは静電レンズ系に関する議論とします。

5.3.3 球面収差

前節の(25)に現れた収差のうち、まず球面収差を考えましょう。球面収差は、(25)において $\mathbf{u}_o = 0$ としたときに残る唯一の収差です。すなわち、軸上光源にたいしての像のボケを与える収差です。

注意すべきは、 C_S の影響は $\mathbf{u}_o = 0$ のときだけ現れるのではなく、どんな \mathbf{u}_o においても同じ寄与をするということです。もし C_S 以外すべて0であったとすれば、軸上光源も軸外光源も同じボケが生じます。

一般には、軸外では(25)の残りの項の寄与が重畳されて、ボケが増加します。すなわち、軸上よりも軸外の方が大きくボケるとき、軸外収差が存在することになります。

(25)で球面収差の項だけを書けば、下式のように

なります。

$$\Delta \mathbf{u}_i = C_S (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a) \mathbf{u}_a \quad (27)$$

もし成分にわけて書けば、

$$\begin{cases} \Delta x_i = C_S (x_a^2 + y_a^2) x_a \\ \Delta y_i = C_S (x_a^2 + y_a^2) y_a \end{cases} \quad (28)$$

です。

球面収差が像面につくる収差パターンを考えるには、(27)のままのほうがわかりやすいでしょう。この式は、物点の位置とは無関係に、 $\Delta \mathbf{u}_i$ が \mathbf{u}_a の方向 ($C_S < 0$ のときは逆方向) を向くことを示しています。物点位置は固定して、絞り面において \mathbf{u}_a を長さを一定にしてクルッと一周させれば、 $\Delta \mathbf{u}_i$ は像面において円周上を回ります。その中心は収差のないときの像の位置、すなわちガウス像点であり、半径は \mathbf{u}_a の長さの3乗に比例します。

以下では、軸上光源のボケだけを考えましょう。このときの軌道は軸対称であるので、 zx 平面上の軌道だけ考えれば十分です。そこで、(21) のときのように傾きを角度で置き換えて、次式で考えます。

$$\Delta x_i = C_S \alpha_o^3 \quad (29)$$

このときの C_S は、アパーチャ形式ではなく通常の形式におけるものなので、(27) や (28) における数値とは違ってきます。しかし、これらの式そのものが係数の定義を物語っているのです、いちいち区別せずに同じ記号をもちいます。

球面収差をもつレンズによる軌道の様子は、Fig.4 のようになります。この図では、軌道がレンズの外側を通るほど、理想的より強い集束力をうける場合を示しています。このときの C_S の符号は、(29) の定義によって負となります。

光学レンズでは、 C_S の符号は正負どちらでも可能です。(第1章で例を示しました。) しかし電子レンズの場合は、シェルツァーの定理にしたがって、通常の軸対称系であれば必ず $C_S < 0$ となります。つまり、レンズの外側ほど余分に強い作用をもってしまうということです。これは前章までに何度か述べているように、静電ポテンシャルと磁気スカラーポテンシャルが、自由空間でラプラス方程式をみたすという制約からくるものです。

さて、これも第1章で述べましたが、球面収差の存在のもとで点光源の像がつくられるとき、ビームが一番絞られる場所はガウス像面よりもやや手前に生じます。これを最小錯乱円 (circle of least confusion)

とよぶのでした。この直径 d_S は次式で与えられ、ガウス像面におけるボケの直径 $2C_S \alpha_o^3$ の1/4になります。

$$d_S = \frac{1}{2} C_S \alpha_o^3 \quad (30)$$

この式は、分解能の計算のように、実効的なビーム径を算出する際にもちいられます。

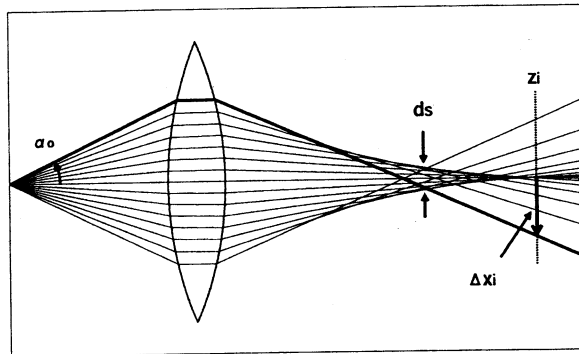


Fig. 4: Spherical aberration of a convex lens. A circle of least confusion of diameter $d_S = (1/2)C_S \alpha_o^3$ is formed.

一般に軸対称系においては、軸上光源にたいして生じる収差は、 α_o に関して奇数次でなければなりません。もし偶数次の収差が存在したとすれば、 α_o が正であっても負であっても同じ方向に軌道がずれることになります。このような状況は、系が軸対称ならありえません。なお軸外収差に関しても、軸対称系では x_o と α_o のべきを合わせて奇数次の収差しか現れないことは、同様の考察からわかることです。

さて、球面収差によるボケの大きさは、絞りによって制御されます。絞り径を小さくしていけば、ボケはいくらでも小さくできますが、その分像が暗くなってしまいます。しかし、絞りをあまり小さくできない理由が他にもあります。それは光の回折効果によるボケ、すなわち回折収差です。これは α_o を小さくするほど増加します。そこで、絞り径をいくりに設定するかが非常に重要になります。

顕微鏡などの分解能に関しては後の章でくわしく議論することにして、ここでは球面収差の寄与だけを考えましょう。

実例として、顕微鏡において試料上で $1\mu\text{m}$ だけ離れた2点を分解して見たいとします。レンズ系の倍率を1000とすれば、試料面上で $1\mu\text{m}$ だけ離れた2点は、拡大された後では1mmの間隔になります。そこで、もし球面収差による点光源のボケが1mmに比べて小さければ、2点は分離して観察されるでしょう。

そこで、(30)で与えられるボケが1mm以下になるように絞り径を設定することになります。

このような議論をする際には、像面におけるボケの大きさを考える代わりに、そのボケを倍率で割って、物面でのボケに換算するほうがわかりやすいでしょう。すなわち、物面において要求される分解能が $1\mu\text{m}$ なのであれば、球面収差によるボケを物面に換算したものがその値以下であればいいわけです。そこで、球面収差係数を倍率 M で割って、**物面換算した球面収差係数**を次のように定義します。

$$C_S^{(o)} = \frac{C_S}{M} \quad (31)$$

これをもちいると、物面換算した収差が下式のように与えられます。

$$\Delta x_o = C_S^{(o)} \alpha_o^3 \quad (32)$$

物面換算のもとでは、収差は物点のずれ Δx_o として与えられることになります。

上のように収差を物面換算するアイデアは、光学顕微鏡や電子顕微鏡を考える際に便利なものです。電子顕微鏡の議論でことわりなしに球面収差係数といえば、それは $C_S^{(o)}$ のことです。

実像をつくる一個のレンズに関しては、倒立像をつくるので $M < 0$ となり、 C_S と $C_S^{(o)}$ の符号は逆になります。よって、一個の電子レンズを考えれば、いつでも $C_S^{(o)} > 0$ となります。よく「電子レンズは球面収差がかならず正である」と言いますが、その際は上の物面換算の定義にしたがっているわけです。

なお、収差はいつでも物面換算して考えるとは限りません。たとえば電子分光系において、試料からアナライザまでの輸送系を考えましょう。もしアナライザの入り口でビームがどれだけボケるかを問題にする場合には、もとの C_S が意味をもち、物面換算する意味がありません。

5.3.4 コマ収差

光源を光軸からはなれた位置に置くと、球面収差以外の収差、すなわち軸外収差も現れてきます。

軸外収差の一般的な性質を調べるために、まずFig.2(a)の状況で考えて、 zx 平面上での収差の表式(21)をもちいます。

物面のある一点 x_o から出た軌道束のボケを考えたいので、(21)において x_o を定数と見なし、 α_o に関

してのべき展開と見てみます。すなわち、

$$\Delta x_i = C_S \alpha_o^3 + (3C_K x_o) \alpha_o^2 + (C_A x_o^2) \alpha_o + C_D x_o^3 \quad (33)$$

のように考えます。

物点を固定して、そこから出る軌道の α_o をいろいろ変えてみます。もし物点が光軸上であれば、現れる収差は α_o の3乗に比例する球面収差だけです。その物点を軸外に移動させたときに、 α_o の2乗、1乗、0乗の収差が余分に現れる、というのが(33)の言うところです。

この場合に、軸外物点を出て絞りの中心を通る軌道、すなわち主光線を、新しい光軸のように見ることができます。主光線がもし本当の、つまり光学系の対称軸としての光軸であれば、その対称性を反映して、 α_o の3乗に比例する収差しか現れません。前節で述べたように、 α_o の3乗に比例する収差というのは、系の軸対称性を反映しているわけです。

しかし、Fig.2(a)のような主光線に沿って、そのまわりの光学系を見渡すなら、軸対称性は見出せなくなります。そのような主光線のまわりの光線にたいしては、角度に関して非対称な収差が現れてもおかしくはありません。

(33)において、もし x_o が十分小さければ、軸外収差のなかでは x_o の1乗に比例するコマ収差が支配的になります。コマ収差は α_o に関して2次の収差なので、 α_o が正であっても負であっても、絶対値が同じなら Δx_i の値は同じになります。そこで、コマ収差がつくるボケは、たとえばFig.5のようになります。

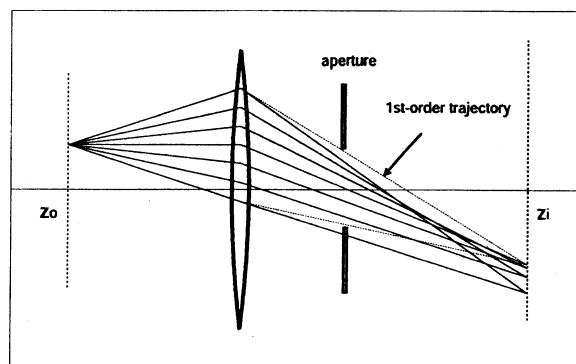


Fig. 5: Rays with coma. This aberration appears when a system is asymmetric around a principle ray.

コマ収差は α_o の絶対値の2乗で収差値が増えていくので、ガウス像点で芯をもち、そこから一方向に尾

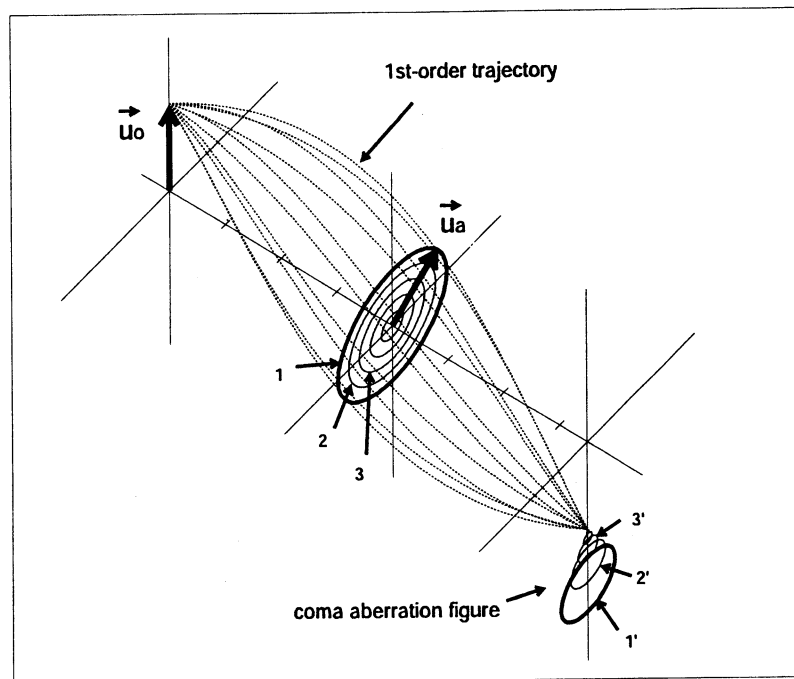


Fig. 6: Aberration figure of coma. Trajectories that intersect the aperture plane around concentric circles 1, 2, ... form non-concentric circles 1', 2', ... on the image plane.

を引くようなパターンをつくります。このように一方に尾を引く収差の存在は、主光線まわりの光学系の非対称性を意味しているわけです。

ここで、光学系の軸ずれの問題を考えておきます。もし光学系の軸合わせが完全ではなく、光学系によって一点に集束させるはずの光束が、光軸からそれて入射したとしましょう。これはちょうど Fig.2(a) や Fig.2(b) の状況になります。あるいは、光学系が完全に軸対称でなかったとしたら、光軸に沿って光束を入射させたつもりでも、光束が通り抜ける屈折率の場は非対称な分布になり、やはり同様の状況になるでしょう。

このような非対称性が存在すれば、光軸と思っている軸の上に、すなわち視野の中央に、コマ収差が現れることになります。このときのコマ収差は、あたかも軸上の2次収差であるように振舞います。

この事実は、実際に電子顕微鏡のわずかな軸ずれを検知するために使われています。この収差が最小となる軸が、現実の(つまり不完全な)光学系において最良の軸と見なすべきものであるわけです。

なお、エネルギーアナライザのような本質的に非対称な系においては、角度の2乗に比例する、したがって一方に尾を引く収差が軸上収差として存在

します。これは2次の球面収差とよんでもいいのですが、軸対称系の場合と区別して、開口収差 (aperture aberration) とよぶのがふつうです。

さて、 zx 平面上の軌道だけでは収差のパターンがわかりにくいので、一般形 (25) に移りましょう。コマ収差の部分だけを抜き出すと下のようになります。

$$\Delta u_i = C_K(u_a \cdot u_a)u_o + 2C_K(u_o \cdot u_a)u_a \quad (34)$$

上式も球面収差のときと同じように、成分で書かずにベクトル形式のままの方がわかりやすいでしょう。Fig.6のように、物点 u_o は固定し、 u_a の終点を円周上で一回転させてみます。このとき u_a の長さは一定なので、上式の右辺第1項は u_o の方向を向いた定ベクトルです。

一方、右辺第2項は u_a の方向ですが、長さは一定ではなく、 u_o と u_a が同一方向、あるいは反対方向を向いたときに最大、これらが直行したときは0ベクトルになります。そこで、 u_a が一回転する間に、第2項は円周上を2回転することになります。

これらの二つの項を合わせると、収差図形は Fig.6 に描かれているようになります。この図は $C_K < 0$ の場合です。絞りの内部を輪帯に分割し、それぞれが像面につくる図形を考えれば、輪帯の半径の増加にし

たがって中心がどんどんずれていく円の集合となります。

この収差パターンは彗星 (comet) の尾のようになり、これがコマ (coma) という名前の由来です。コマ収差がつくる彗星の尾の開き角は、必ず 60° となります。図のように光軸から離れる方向に尾を引く場合は外向きコマ ($C_K < 0$ のとき) とよび、光軸側に向くときは内向きコマ ($C_K > 0$) とよびます。

5.3.5 像面湾曲と非点収差

ここでもまず zx 平面上で考えます。(33)において、 x_0 がある程度大きくなると、コマ以外の軸外収差も目立ってきます。(33)における C_A の項をこの節で考えます。

x_0 を固定して考えれば、これは α_0 に関して1次です。前節と同様、ここでも主光線を新しい光軸と見るなら、 α_0 に関しての1次のずれというのは、収差ではなく1次軌道としての振舞いです。つまり、物点から出た軌道が、像面として想定している面とは異なる面上で集束している場合、 α_0 の1乗に比例したずれが生じます。

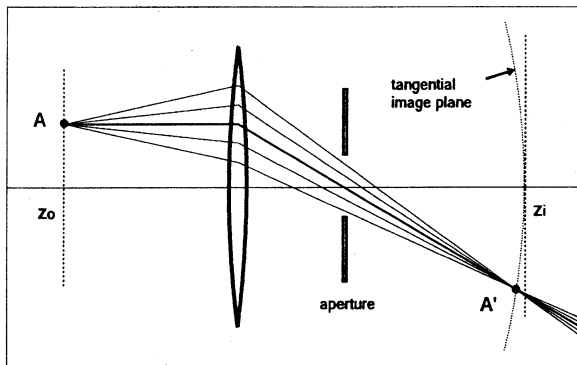


Fig. 7: Field curvature. Aberration disappears when the tangential image surface is thought to be an image plane.

すなわち Fig.7 のように、像面においてボケはつくもの、どこか別の位置ではちゃんと一点に集束しているという状況です。主光線を光軸と見たとき、その光軸に関して1次軌道としての振舞いをするので、ある軌道の定数倍もまた現実の軌道になります。

単に集束面が z 方向に平行移動するだけなら、その集束面を真の像面として定義しなおせばよいだけです。しかし、この収束点の像面からのずれは x_0^2 に

比例するので、像面自体が湾曲し、その上で見るなら像はボケないということになるわけです。

さて、 y 方向を加えて3次的に考えると、少し状況が複雑になります。(25)において、上の C_A の項に相当する部分を抜きだすと下のようになります。

$$\Delta u_i = 2C_{A1}(u_o \cdot u_a)u_o + C_{A2}(u_o \cdot u_o)u_a \quad (35)$$

この式から収差図形が計算できて、それは一般に楕円形のボケになります。しかし、重要なのは収差が発生する機構です。

考え方は先と同じで、主光線を光軸と考えて、そのまわりに1次軌道として振舞う軌道束を考えればよいわけです。ただし、今度はその軌道の x 成分と y 成分を考えなければなりません。問題は、主光線が真の光軸でないことを反映して、 x 方向と y 方向の集束位置が同じになるとは限らないということです。

Fig.7 で示した集束面は、紙面上に乗る軌道に関するものであり、これをタンジェンシャル像面 (tangential image surface) といいます。これと直行する方向の軌道の集束面はサジittal像面 (sagittal image surface) とよべれます。両者は一般に異なった曲率の像面を定義します。この状況のもとで、 y 軸上の軸外物点 A (Fig.7 では x 軸上ですが) から出る主光線を直線に引きのばして、これに沿っての軌道束を描くと、たとえば Fig.8 のようになります。

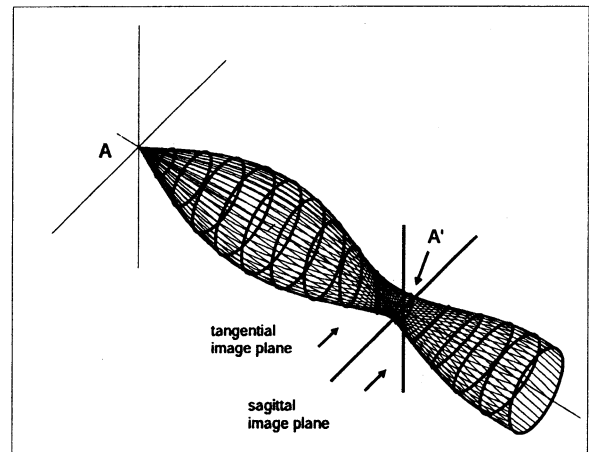


Fig. 8: Trajectories with astigmatism. A beam receives different focusing action in tangential and sagittal directions.

軌道の x 成分と y 成分の集束位置が異なると、 x 成分が集束する位置では y 成分は集束せず、 y 方向にの

びた直線状の像がつくられます。逆に y 成分が集束する位置では、 x 方向にのびた直線ができます。これらの二つの集束位置の中間でビームが丸くなり、ここで一番小さく絞られます。これを球面収差のときと同じく、最小錯乱円とよびます。

このように、物点ごとに集束位置が二つに分離する現象を非点収差といいます。もしタンジェンシャル像面とサジッタル像面が一致すれば、像面湾曲はあるが非点はないという状態になります。一般には、タンジェンシャル像面とサジッタル像面の湾曲の平均値が像面湾曲とよばれ、両者の隔差が非点とよばれます。

像面湾曲と非点は、やはりコマと同様に、主光線まわりの系の非対称性の現れです。§5.2におけるように zx 平面上の軌道だけを考えた場合は、サジッタル方向の湾曲は現れず、したがって収差係数が一つ少なくなるわけです。

なお、(35)における収差係数 C_{A1} 、 C_{A2} が、それぞれ像面湾曲と非点に対応するものではありません。証明は省略しますが、各収差係数の意味を記しておきます。まず、タンジェンシャル像面がガウス像面から離れる度合いは $2C_{A1} + C_{A2}$ で与えられ、サジッタル像面に関しては C_{A2} で与えられます。これらの平均値 $C_{A1} + C_{A2}$ が像面湾曲の収差係数としてもちいられます。また、タンジェンシャル像面とサジッタル像面が離れる度合いは C_{A1} で測られ、これが非点収差係数です。

5.3.6 歪曲収差

最後に残ったのは歪曲収差ですが、これは (33) において α_0 を含まない項です。これが意味するところは、ある物点を出て絞りを通過した光線は、像面においてすべて同じ距離だけずれて到着するという事です。この状況を Fig.9 に示します。

もし C_D が 0 ならその集束点はガウス像点に一致し、物体に相似形の像がつくられますが、そうでなければ像の歪みを生じるわけです。歪曲収差は、像のボケをつくる収差ではないことに注意しましょう。歪曲収差は、主光線まわりの系の非対称性の反映というよりも、主光線自身が被る収差です。

歪曲収差も、コマと同じよう外向きと内向きがあります。Fig.9におけるように、光軸から離れた物点ほど理想的な場合より外側にずれる場合は、像は Fig.10(a) のように歪みます。これは $C_D < 0$ の場合に対応し、糸巻き形歪曲 (pincushion distortion) といいます。逆の方向に歪む場合は、図 (b) の樽形歪曲 (barrel dis-

ortion) となり、これは $C_D > 0$ の場合です。

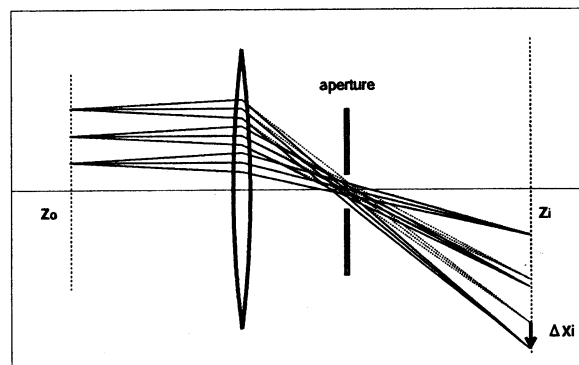


Fig. 9: Rays with distortion. This aberration is due to the spherical aberration which bends trajectories toward the off-axis direction.

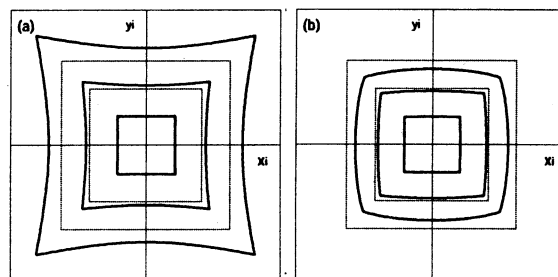


Fig. 10: (a) Pincushion distortion. (b) Barrel distortion.

さて Fig.9 に戻ると、レンズの外側ほど、1 次理論よりも強く曲げられています。これは、球面収差に関して Fig.4 を説明したときと、まったく同じ表現であることに気づかれるでしょう。つまり、球面収差も歪曲収差も、レンズがもつ同じ傾向によって説明できるのです。これら二つの収差は別ものではなく、レンズの同じ性質が異なる形で現れたものと見ることができます。

とすれば、他の収差に関しても、同じような関連性を探求すべきです。次節からこのテーマに取り組みましょう。

5.4 収差相互の関係について

5.4.1 絞り位置による収差係数の変化

収差係数というのは便利な概念ですが、それぞれの収差が独立に存在するわけではありません。球面収差

やコマ収差などの名称は、像面でのボケを与える関数をべき展開した上で、その各項に付けられた名前です。これらの分類はあくまで数式上のものであり、本来は一体として把握すべきものです。

収差係数が互いに関連するという事実は、すでに §5.2.3 で触れています。すなわち、レンズ前後の空間においてレンズのもつ非線形作用が混ぜ合わされ、その結果として像面における収差係数が決定されます。これと似た状況が、絞りの位置を移動するときにも起きます。絞りを動かすだけで各収差係数が互いに入り混じるという、別の意味での「混ぜ合わせ」が起きるのです。

収差展開の式をアパーチャ形式に変換することに関しては、§5.3.1 で述べました。ここでは、具体的にどうやって変換を行うかの説明をまず行っておきます。

出発点は (20)、すなわち、

$$\Delta x_i = C_S x_o'^3 + 3C_K x_o' x_o + C_A x_o' x_o^2 + C_D x_o^3 \quad (36)$$

です。上式の x_o' のかわりに、絞り面 $z = z_a$ における軌道の高さ x_a を展開の変数としてもちいたいわけです。そのためには、 x_o' と x_a の間の関係式を見つける必要があります。

第4章で述べたように、初期条件 (x_o, x_o') にたいしての1次軌道は、1次軌道方程式の基本解 $g(z)$, $h(z)$ をもちいて、

$$x(z) = x_o g(z) + x_o' h(z) \quad (37)$$

の形で与えられます。これが1次軌道方程式の一般解となるのでした。

上式で $z = z_a$ とおけば、

$$x_a = x_o g_a + x_o' h_a \quad (38)$$

となり、ここで x_a , g_a , h_a はそれぞれの $z = z_a$ における値です。上式を x_o' で解けば、

$$x_o' = \rho x_o + \sigma x_a \quad (39)$$

が得られます。ここで、

$$\rho = -\frac{g_a}{h_a}, \quad \sigma = \frac{1}{h_a} \quad (40)$$

と置いています。(39)が、求めていた x_o' と x_a の関係です。

もし絞り面が焦点面に一致していれば $g_a = 0$ となるので、 $\rho = 0$ です。このときは(39)は $x_o' = \sigma x_a$ となって、 x_o' と x_a は比例します。そこで、べき展開の

変数として x_o' をもちいても x_a をもちいても、本質的には同じことです。

一般の場合には、(39)を(36)に代入して x_o と x_a のべきに整理することで、次式が得られます。

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= (\sigma^3 C_S) x_a^3 \\ &+ 3\sigma^2 (\rho C_S + C_K) x_a^2 x_o \\ &+ \sigma (3\rho^2 C_S + 6\rho C_K + C_A) x_a x_o^2 \\ &+ (\rho^3 C_S + 3\rho^2 C_K + \rho C_A + C_D) x_o^3 \quad (41) \end{aligned}$$

この係数のそれぞれが、(22)におけるアパーチャ形式での収差係数となります。 ρ と σ の値が絞り位置によって変化するので、上式は間接的に収差係数の絞り位置依存性を与えています。

上式において、球面収差に関しては x_o' から x_a への換算定数 σ の分が変わっただけで、本質的には変化がありません。つまり、球面収差だけを考えるのであれば、絞り位置をどこに選ぶかは重要ではありません。しかし軸外収差は、絞りの移動によって互いに複雑に入り混じることとなります。

たとえば、ある絞り位置において、球面収差以外の収差がすべて0であったとします。その状態で絞り位置をずらせば、もとの C_S が新しい収差係数のすべてに編入されます。すなわち、すべての軸外収差が現れることとなります。しかし、このときに新たに現れた軸外収差は、どこからやって来たのでしょうか？ここでいったことは絞りを移動しただけであり、レンズそのものは何も変わっていません。

この例からわかることは、軸外収差はレンズのみを特徴づけるものではないということです。軸外収差の大きさは、絞り位置によって変化します。したがって、「球面収差だけをもつ系」と言っても、それは絞り位置まで含めてそのような系になっているわけです。

絞り位置によって軸外収差が変化する理由は、すでに §5.3 における議論において現れています。すなわち、軸外収差は光学系を主光線に沿ってながめたときの非対称性を反映する、という事実です。絞り位置を変えれば主光線が変わり、よって軸外収差が変わるのは当然です。

もし適当な絞り位置で軸外収差が小さくなるなら、その絞り位置にたいしての主光線が、系が対称に見えるような通り方をしているということです。そのような判断によって、絞り位置が選ばれるべきです。すなわち絞り位置は、光学系において最適化すべき対象であることとなります。

しかしながら、必ずしもそのような基準で、現実に

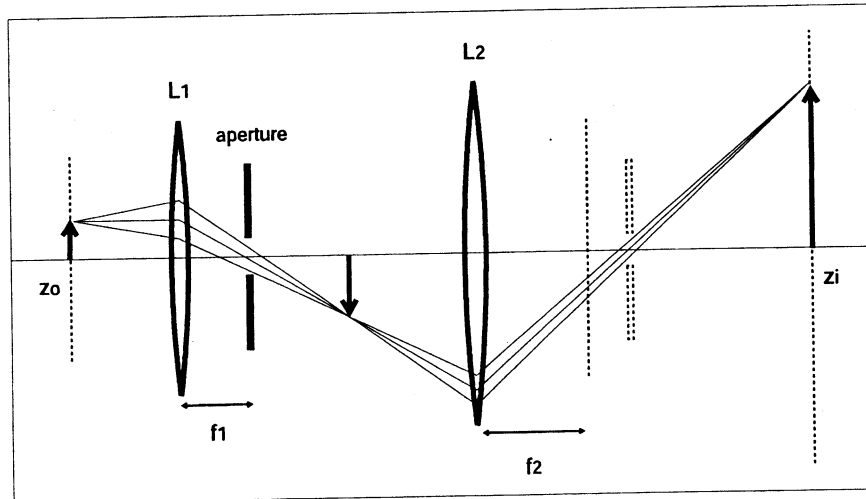


Fig. 11: Two-lens system with an aperture. The aperture is placed at the focal plane of the first lens L_1 , but the effective aperture position for the second lens L_2 is not always its focal plane.

絞り位置が選ばれるのではありません。たとえば透過型の電子顕微鏡を例にとると、以下のような事情があります。

透過型電子顕微鏡においては、試料に平行ビーム（波として見れば平面波）を照射し、試料を透過した電子ビームの強度分布をレンズ系で拡大します。拡大光学系を簡単に2段レンズ系とすれば、たとえばFig.11のような光線図となります。 $z = z_0$ が試料面です。

この系において、試料下面に生じた波動関数の空間周波数分布が、対物レンズ L_1 の回折面（焦点面）に写ります。つまり、ここに波動関数のフーリエ変換像がつけられます。この一部を絞りで選択することで、特定のコントラスト、たとえば、ある回折条件を反映した像が得られます。よって、絞りは回折面でなければならず、収差の都合で位置を変えることはできません。

絞りはもちろん、収差の影響の制御を同時に行います。絞りがどこに置かれても、絞り径を小さくすればするほど収差量が抑えられるのは確かです。ただし、あまり小さくしすぎると、空間周波数の高域がカットされることで、像はかえってボケてしまいます。言葉を変えれば、絞り径を小さくするほど回折収差が増えます。そこで、幾何収差と回折収差のバランス条件として、最適絞り径というものがあります。

さて Fig.11 を見ると、絞りは L_1 の回折面に置かれていますが、第2レンズ L_2 にとっての絞りは L_2 の回折面とはなりません。すなわち、 L_2 が作る絞りの像が L_2 にとっての絞り位置であり、これは一般に L_2 の回折面とは別の場所にできます。

この事情によって、多段レンズ系における軸外収差の決まり方は複雑になります。各レンズにとっての絞り位置は、実際に絞りが置かれるレンズを除けば、光線図をどのように設計するかによって決定されます。絞りそのものをどこに置くかという問題とは違うわけです。このような系において収差がどのように評価されるかは、後の章で詳しく述べる予定です。

5.4.2 球面収差と軸外収差

球面収差だけをもつ系であっても、絞りを移動すればすべての軸外収差が現れるということを見ました。しかし(41)のような式だけでは、絞りを動かしたときに何が起きるのがよくわかりません。

そこで、球面収差だけが存在する系の実例を用意して、それを調べてみましょう。そのような例は、すでに第1章でもちいた、Fig.12の系です。

復習になりますが、ガラスでつくった球面の屈折面では球面収差を0にすることができず、それが球面収差という名前の由来でした。ところが、球面であれば曲率中心 C をもち、この C を中心として系全体が対称になります。これにより、 C を通る直線はすべて

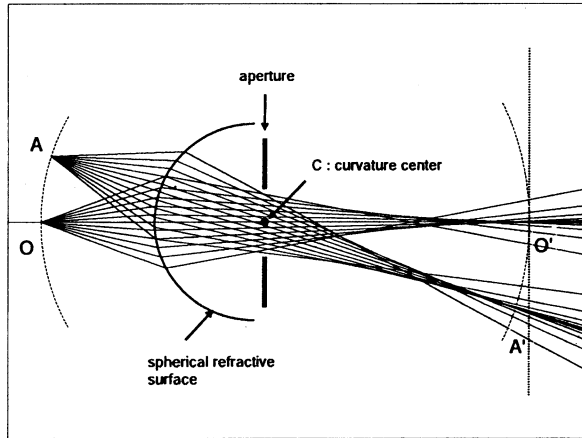


Fig. 12: Optical system with a spherical refractive surface. Owing to the spherical symmetry of the system, off-axis aberrations disappear when an aperture is placed at the center of curvature C of the spherical surface.

光軸と対等になります。

そこで、 C の位置に絞りを置き、物面と像面とともに C を中心とした球面として考えれば、すべての物点を通る主光線は同等となって、軸外収差が発生しません。つまり、球面収差だけが存在する系となります。

現実には物面も像面も平面として考えなければなりません。平面と球面の違いは光軸からの距離に関して2次以上です。よって、光軸からの距離に関して1次であるコマ収差は、物面と像面が球面でなく、平面と考えたとしても0のままです。

それ以外の軸外収差は0でなくなりますが、それは単に球面を平面に置き換えることで生じるもので、深刻な影響を与えるものではありません。そこで、以下では物面と像面を球面として考えて、Fig.12の系はすべての軸外収差が0であると見なすことにします。

さて Fig.12 において、もし絞りが曲率中心 C になればどうなるでしょうか。まず1次軌道が絞りによってどの様に制限されるかを考えます。その様子を Fig.13 に示します。軸外物点 A から出た軌道のうち、絞りによって選択される部分を太線で示しています。

Fig.12 においては、ある軸外点 A から出る光束は、絞りによって直線 ACA' に関して対称に切り取られます。しかし Fig.13 では、同じ直線 ACA' に関して見るなら偏って切り取られていて、 A から出る主光線は C を通る直線ではなくなります。

ここで一度、絞りを取り払った状況を考えてみま

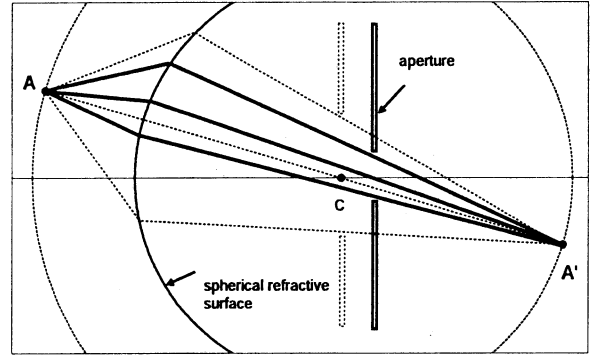


Fig. 13: Rays are selected by an aperture in an asymmetric way when the aperture is not placed at the center of curvature C .

しょう。このときは、軸外点 A から出る光束は球面収差によってバラけた状況になります。その状態で、光束の一部を非対称に選んで、その選択部分だけに注目するとどのように見えるでしょうか。

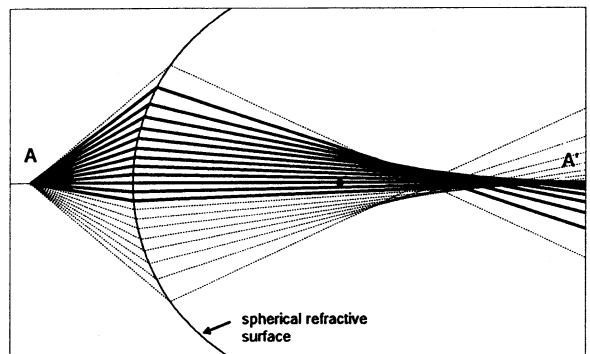


Fig. 14: Rays formed by the spherical aberration of a spherical refractive surface. Bold lines indicate off-axis rays which are selected by an aperture placed at a general position.

この様子を Fig.14 に示します。この図では、 A から出る光束を ACA' を水平にして描き、絞りによって選択される軌道を太線で描いています。全体としては球面収差がつくる光束であっても、その一部だけを見れば、コマ収差のように片方に偏ったパターンになることがわかります。

すなわち、軸外収差が「現れた」わけです。これが絞り位置によって軸外収差が生じることの意味です。光学の教科書において、「軸外収差は球面収差が姿を

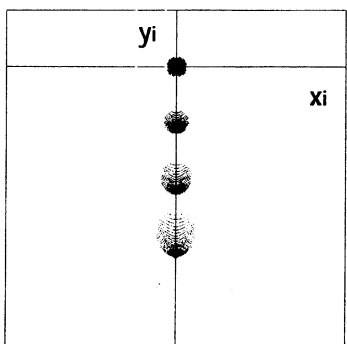
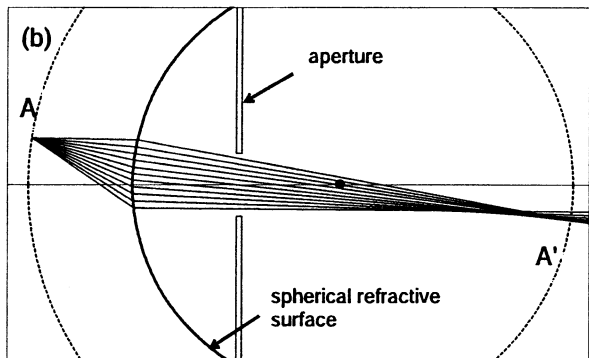
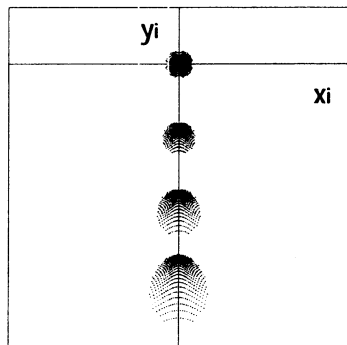
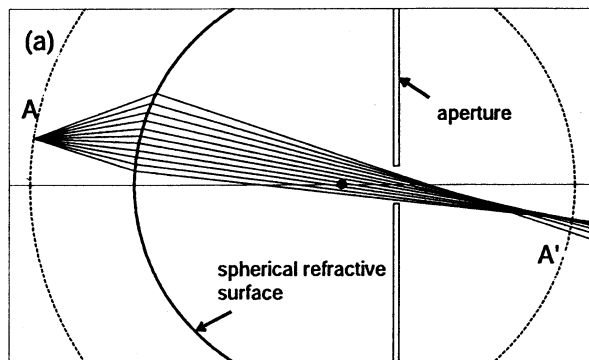


Fig. 15: Change of off-axis aberration according to the position of an aperture. Rays and aberration figures are shown when the aperture is placed at the (a) forward and (b) backward positions to the center of curvature.

変えて現れたものである」という表現がつかわれることがあります。今の例によってよく理解されるでしょう。

では実際に、絞り位置をいろいろ変えたときの軌道を計算してみます。結果は Fig.15(a)(b) のようになります。収差パターンは、軸上物点および三つの軸外物点にたいして、球面としての像面に写った図形を平面上に投影して描いています。

図 (a) は絞りが C より像面寄りの場合です。外向きコマがあるときのような軌道になっています。ただし、たとえ光軸の近くでも純粋にコマ収差のみの寄与になることはありません。この系は球面収差をもち、球面収差はすべての物点で平等に生じますから、軸外物点であっても球面収差は軸上と同じボケをつくっています。ここで見えているパターンは、球面収差のつくるボケに、主としてコマ収差が重畳されたものです。図 (b) は逆に絞りが物面寄りの場合であり、今度は内向きコマが混じっています。

以上のような説明を、それぞれの軸外収差にたいして個別に行うこともできますが、あまり本質的ではありません。これは単に、球面収差がつくる光束の一部を切り取って、それを各収差成分に分解して考えるということではかありません。

ただし、歪曲収差に関しては、これが絞り位置に依存するということが理解されにくいようです。歪曲収差と球面収差の関係はすでに §5.3.6 で述べましたが、絞り位置との関係をここで説明しておきます。

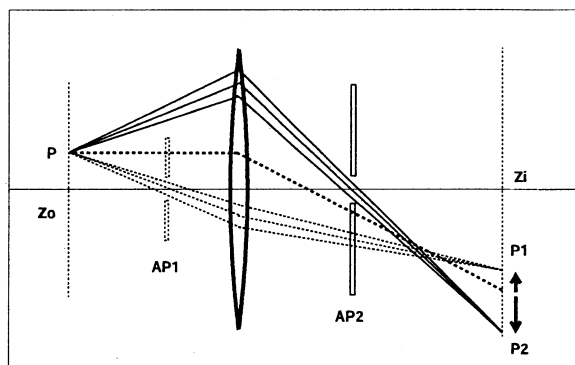


Fig. 16: Change of sign of distortion according to the position of an aperture.

Fig.16 は、軸外物点から出た光線の選ばれ方が絞り位置で変わる様子を示しています。像のボケではなく歪曲だけを考えたので、光束は細く絞っています。

この図のレンズは、Fig.12 と同じ符号の球面収差をもつものです。よって、レンズの外側をとる軌道ほど理想的な場合より内側に曲げられます。これにより、絞り AP_1 で選ばれた光束は、球面収差によってガウス像点より光軸側に曲げられ、絞りが AP_2 である場合には、逆に外側に曲げられます。よって、絞りが AP_1 のときは Fig.10(b) の樽形、 AP_2 では同 (a) 図の糸巻き形の歪曲収差となります。

5.4.3 球面収差のない系

前節の内容から当然疑問となるのは、「軸外収差はすべて球面収差だけで説明できるのか?」ということです。もしすべての軸外収差が球面収差に由来するのであれば、球面収差が補正された時点で軸外収差も消えるはずですが、そこで、実際に球面収差が0の系を調べてみるのがよいでしょう。

第1章において、屈折面を非球面にすることで光路長一定の原理をみだし、球面収差を0にできることを述べました。この原理に従って球面収差を補正した系は Fig.17 のようになります。この屈折面は「デカルトの卵形」とよばれるのでした。

問題は、軸外物点の結像です。非球面にしたので曲率中心がなくなってしまう、絞りをどこに置けばよいかわかりません。そこで取りあえず、光軸付近の形状を球面で置き換えたときの曲率中心付近に置きます。また、物面と像面にどのような曲率を与えて考えるのがよいかもわかりません。しかし物点が光軸から遠くなければ、ともに平面と考えても本質は失われないうでしょう。

このように設定したときの、軸外物点の結像の様子が Fig.17 に示されています。これからわかるように、物点が光軸からはなれると軸外収差が現れ、ボケはほぼ光軸からの距離に比例しています。収差パターンからもわかるように、これはコマ収差です。(内向きコマになっています。) 光軸から離れるにしたがって他の軸外収差も混じってくるので、コマ収差特有のパターンは失われます。

この系は球面収差が0なので、軸外収差を球面収差によって説明することができません (!)。つまり、球面収差が姿を変えて現れたのではなく、この系が本来的にもつ軸外収差と考える必要があります。

この系が軸外収差をもつのは不思議ではありません。すなわち、前節の Fig.12 において軸外収差がないのは、系の対称中心である C が存在したからです。いまは球面収差を補正するために屈折面を非球面に

してしまったので、いわば「系の中心」とでもよぶべき点がなくなってしまったのです。

この系においては、軸外物点が軸上と同等になるという状況は、絞りをどこに置いても実現されません。すなわち、絞りの位置をどう選んでも軸外収差は補正できないということです。

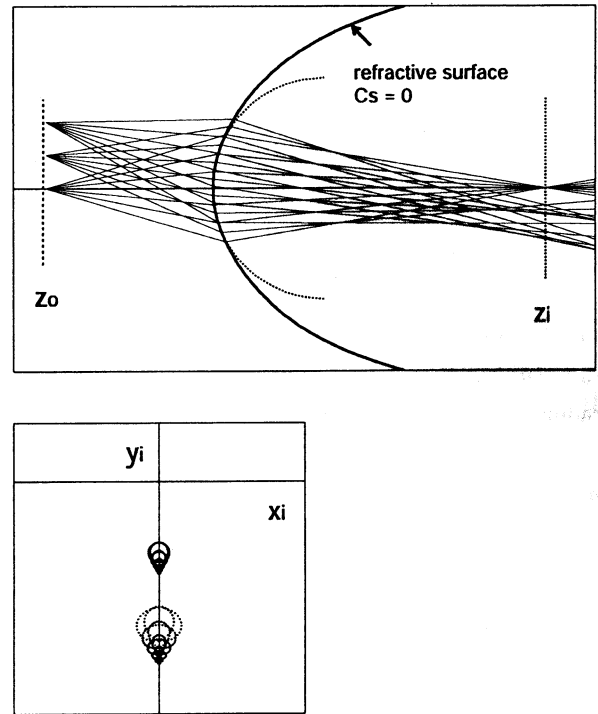


Fig. 17: On-axis and off-axis rays for an aspherical refractive surface. Spherical aberration is absent, but coma and other off-axis aberrations appear because of an asymmetry of the system.

なお、レンズではなく鏡で光を集める場合、無限遠の物点にたいして球面収差が0になるのは放物面鏡です。これで天体望遠鏡をつくると、視野の中心付近では鮮明な像が得られます。しかし、「系の中心」をもたないで軸外収差が大きく、外側ほど大きくボケてしまいます。

もし球面反射鏡をもちいれば、球面収差はあるものの、曲率中心に絞りを置けば軸外でもボケは同程度に保たれます。そこで、広い視野を得るためには適したものとなります。

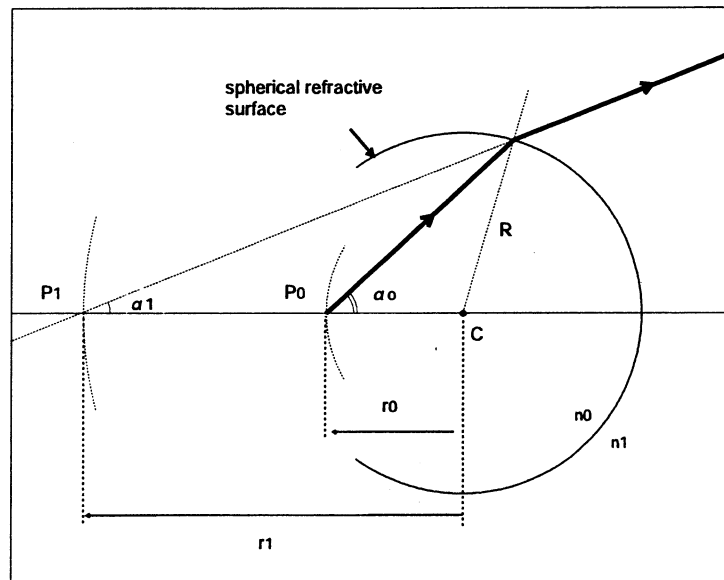


Fig. 18: Refraction of a ray at the spherical interface of a refractive index. Objects on the spherical surface of radius $r_0 = (n_1/n_0)R$ are all imaged without spherical aberration to the corresponding points on the spherical surface of radius $r_1 = (n_0/n_1)R$. This relation is preserved up to $\alpha_0 = \pm 90^\circ$.

5.4.4 無収差の系

ここまでの議論から言えば、球面収差と軸外収差の補正は両立しないことになります。すなわち、屈折面が球面であれば、球面収差は存在しますが、絞り位置をうまく選べば軸外収差は0にできます。一方、非球面にすると球面収差は補正されますが、絞りでは補正できない軸外収差が現れます。

しかし、この状況はあくまで一枚の屈折面にたいしての話です。複数のレンズを組み合わせた系では、各屈折面の収差をうまく打ち消し合わせることで、全体としては補正が可能です。たとえば、非球面がつくる内向きコマがあった場合、別のレンズで外向きコマをつくれれば補正されます。

そのような複雑な系をここでもちだすのは適当ではないので、少し譲歩しましょう。一般に、光学において収差が消える条件を考える際には、系は最終的に実像をつくることを前提としています。球面の屈折面はかならず球面収差をもつ、というのもその一つです。しかし虚像でよければ、一枚の屈折面、しかも球面の屈折面によって、球面収差と軸外収差を同時に0にすることが可能です。

その系を Fig.18 に示します。図のように点 C を中心として半径 R の球面屈折面を考え、球面の内側の屈折率を n_0 、外側を $n_1 (< n_0)$ とします。z 軸上の

どこかに物点 P_0 を置くと、そこから出た光線は、球面上でスネルの法則にしたがって屈折されます。屈折後の光線を逆方向に外挿して、それが z 軸と交わる点を P_1 とします。

ここで物点 P_0 の位置をうまく選ぶと、出射角 α_0 とは無関係に P_1 は同一の点になります。これは、球面収差なしに P_0 の虚像が P_1 につくられることを意味します。具体的には、こうなるような P_0 の位置は C から $r_0 = (n_1/n_0)R$ 、 P_1 の位置は $r_1 = (n_0/n_1)R$ となります。(スネルの法則、および三角形の相似をうまく使って証明されます。)

上の関係は、出射角 α_0 が $\pm 90^\circ$ まで保たれます。よって、これは 3 次の球面収差だけではなく、すべての次数の球面収差が 0 ということです。しかも、この系では「系の中心」C が存在するので、軸外収差も存在しません。すなわち、C を中心として P_0 を通る球面を物面、 P_1 を通る球面を像面と考えれば、すべての物点は同等に結像されます。

この系の収差がないということに、絞りがまったく関与していないことに注意しましょう。この系では絞りをを用いる理由がありません。前節の Fig.12 は、同じく「系の中心」を有する系ですが、軸外収差が消えるのは絞りを C の位置に置いたときだけでした。絞りを移動すれば、球面収差が軸外収差に姿を変えて

現れるわけです。

ところが、今の系は球面収差が0ですから、絞り位置を変えても軸外収差が現れることはありません。もともと球面収差も軸外収差もないのですから、絞りを入れることで何らかの収差が「発生」することはないわけです。

この系は実像がつかれないので、あまり応用がないように思えるかもしれません。しかし、この原理を次々にもちいれば、収差を発生せずにビームの開き角を減少させることができます。その様子を Fig.19 に示します。

それぞれの屈折面で上に述べた条件がみたされれば、軸上から ±90° で出たすべての光線を、収差なしで平行ビームにまでもっていくことが可能です。そこで、この系によって開き角を減じた上で次段のレンズ系に渡せば、全体としての収差を大幅に減らすことができます。

この系は、多くの光学系で重要な役割を果たしています。とくに、大きな開き角の取り込みを必要とする光学顕微鏡の対物レンズなどに、この原理が応用されています。

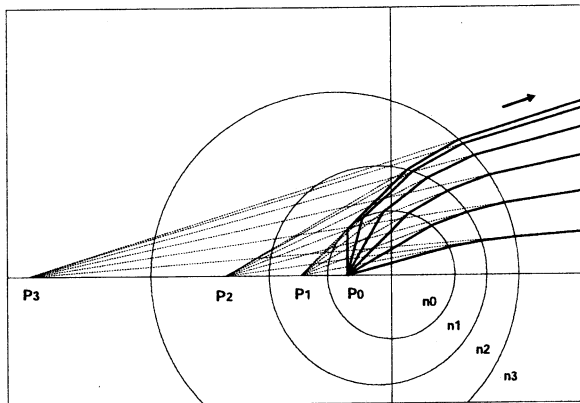


Fig. 19: Reduction of angular divergence of rays using successive spherical refractive interfaces.

5.4.5 電子光学系への応用

本章の目的からは少し外れますが、前節の Fig.19 の原理を電子光学系に適用した例があるので、ここで紹介しておきます。

光学系における屈折率分布と、電子光学系における静電ポテンシャル分布が対応するので、Fig.19 のような静電ポテンシャル分布をつくることができれば、電

子光学系においていろいろ応用が効きそうです。しかし電子光学では、ポテンシャルがラプラス方程式をみたすべきという制約があります。自由空間において、厳密にそのような分布をつくりだすのは不可能です。

とは言え、似たような分布であれば、同一の原理がはたらいて、収差が小さく抑えられるという期待はできるでしょう。また、厳密に Fig.19 と等価な系が要求されるのではないという事情もあります。すなわち、あとに続くべき電子レンズはかならず球面収差をもつので、全体として打ち消しあうような符号の収差をつくるべきです。

次のような系を考えてみましょう。まず、Fig.19 の最初の屈折面を球面メッシュでつくります。次々にメッシュをもちいると透過率分だけ強度を損してしまうので、その代わりに、いくつかの電極をメッシュの近くにうまく配置して、ポテンシャル分布をなるべく図に近づけるようにします。

この計算を力づくでやるのは大変なので、次のような手順にします。まず、ラプラス方程式の解で半径 R の球面上で 0 という境界条件をみたすものは、球面座標 (ρ, θ, ϕ) をもちいて次のように書けます。

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\rho^n - \frac{R^{2n+1}}{\rho^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (42)$$

ここで $P_n(x)$ はルジャンドル多項式で、展開係数 A_n は任意です。(上式は電磁気学の教科書によく載っています。)

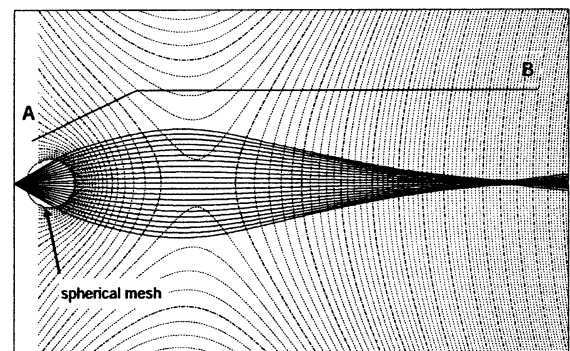


Fig. 20: Electron trajectories with starting angles up to ±30° in the field given by series expansion (42) with $n = 0, 1,$ and 2 . The expansion coefficients A_n were determined so as to minimize spherical aberration.

(42) において、 $n = 0$ の項は球対称な解で、 $n = 1, 2, \dots$ の項はそれからのずれを与えます。そこで、 A_n

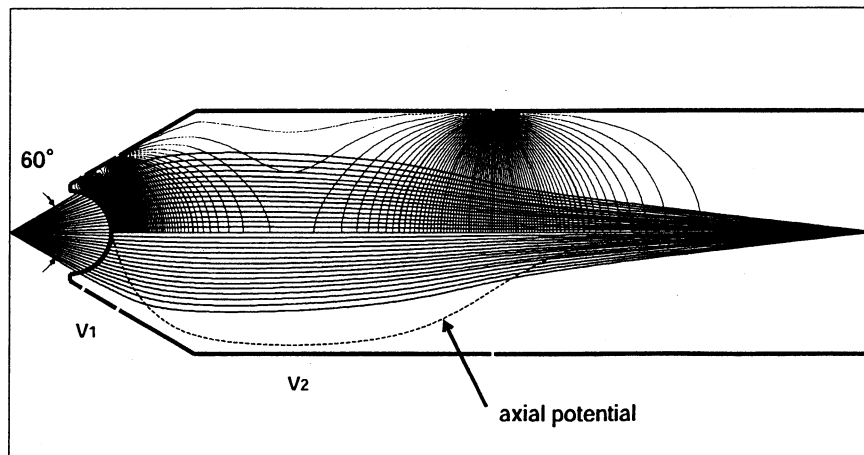


Fig. 21: Design example of an electrostatic electron lens with a spherical mesh. The results of ray tracing with starting angles up to $\pm 30^\circ$ are shown.

を変えてみることで、球面メッシュのまわりのポテンシャル分布を、ラプラス方程式の制約のもとでいろいろ試してみることができます。

実際に電子を飛ばして、大きな角度まで集束するような係数 A_n の組を探してみた結果を Fig.20 に示します。これは上式の最初の 3 項だけで最適化した結果ですが、物面での出射角 $\alpha_o = \pm 30^\circ$ までよく集束されていて、通常の電子レンズよりはるかに小さい球面収差が実現されています。

そこで、次の目標はこの図のようなポテンシャル分布を球面メッシュのまわりにつくることです。もしこれとまったく同じ分布をつくりたいければ、たとえば図に示した A から B に至る直線に内径が沿うように円筒状の電極をならべて、それぞれの電極位置で Fig.20 と同一の電位を与えていけばよいわけです。ラプラス方程式の解は境界条件で一意に定まるので、電極より内側の空間のポテンシャル分布は図と同一になります。しかし、これをそのまま行くと非常に多くの電極が必要になるので、実際的ではありません。

そこで、電極の数はなるべく少なくして、大きな角度まで集束できる条件をさがすことになります。ここまでくれば、あとは具体的な電極配置を想定して、レイトレースを繰り返すだけです。

このような計算は、人間が試行錯誤を繰り返してもよいのですが、極小値の探索のための最適化ルーチンをうまくもちいれば、ある程度は自動化することが可能です。ジッと待っていればポンと結果が出てくるといふわけにはいきませんが、微調整の段階で

もちいればかなり有力です。

なお、このように大きな開き角では、3 次の収差係数ではまったく不十分で、レイトレースだけが有効な手段となります。しかしレイトレースは時間がかかるので、最適化の初期の段階だけでも収差係数をもちたいところです。ところが、メッシュの存在によって軸上ポテンシャルの微分が不連続になるので、そのような系にたいしての収差係数の公式をつくること自体がやっかいです。

最適化の結果の例を Fig.21 に示します。この例では、アース電位以外の電極は二つだけにして、 $\alpha_o = \pm 30^\circ$ まで完全に集束させています。この計算では、点光源のためのレンズが想定されており、途中の段階で軸外収差は評価していません。しかし、前節で述べた補正原理によって、ある程度広がった光源にたいしても収差が小さく抑えられているはずで

このように途中でメッシュをもちいたレンズでは、メッシュ孔のひとつひとつがレンズ作用をもちます。そこで、このようなレンズを実際に製作する際は、メッシュ孔がつくるボケにたいしての評価を行っておく必要があります。このテーマに関しては、後の章で詳しく述べる予定です。

本節で述べた例は、電子光学系において、新しい光学要素を設計するための手順の典型になっています。すなわち、解析的な手法で行けるところまで行き、あとはレイトレースを繰り返すことで現実的な最適化を行います。ここでの例では、最初の投げどころであった補正原理は、途中の段階からは忘れ去られます。し

かし、そのような原理の存在によって、目標を見失うことなく作業を進めて行くことができます。

5.5 まとめ

本章では、光学系の収差係数が決定される過程を示した上で、収差の分類と性質を議論しました。要点をまとめておきます。

(1) 光学系の収差は、レンズ自身もつ非線形な作用によって現れる。しかしレンズの非線形項のそれぞれが収差係数に対応するのではなく、レンズ前後の空間が関与するため、各収差は互いに複雑に関連する。

(2) 軸対称レンズの収差は、軸上物点にたいして球面収差、および軸外収差としてコマ、像面湾曲、非点、歪曲が現れる。

(3) 軸外収差は、主光線に沿って光学系を見渡したときの非対称性を反映する。もし光学系の軸合わせが完全でなければ、その影響が軸上の非対称な収差として現れる。

(4) 軸外収差係数は、絞りの移動によって変換を受け、互いに混ぜ合わされる。

(5) 系全体が対称に見える点、すなわち「系の中心」をもつ系においては、絞り位置をその場所に置けばすべての主光線が同等となり、軸外収差は消える。その状態で絞りを移動すれば軸外収差が発生するが、それは球面収差が姿を変えたものである。

(6) 「系の中心」が存在しない場合は、本質的な軸外収差をもち、絞りによっては補正できない。

(7) 球面の屈折面によって、球面収差と軸外収差を同時に0できる。この系は虚像しかつくりませんが、ビームの開き角を減少させるために有効である。電子光学系においては、球面メッシュをもちいてこの原理が実現される。

5.6 文献紹介

光学レンズの収差に関しては、第1章で紹介した文献と重複しますが、次のものを参考にして下さい。

[1] 吉田正太郎, 写真レンズの科学, 地人書館 (1979)

[2] 松居吉哉, 結像光学入門, 啓学出版 (1988)

[3] 久保田広, 光学, 岩波書店 (1964)

とくに [3] は、各収差の性質や相互の関連について、現実的な設計の観点から詳しく述べています。

メッシュを用いた電子レンズに関しては、

[4] M. Kato and T. Sekine, J. Vac. Technol. A **13**, 2255(1995); A **14**(2), 453(1996)

[5] H. Matsuda, H. Daimon, M. Kato and M. Kudo, Phys. Rev. E **71**, 066503(2005)

に報告があります。[5]では自由度を増すためにメッシュを非球面にした計算がなされ、さらに大角度まで球面収差が補正されています。